

1. Matrizen

1.1. Definition und Charakterisierung von Matrizen

Eine $m \times n$ – Matrix ist eine rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ ($m, n \in \mathbb{N}$) Elementen a_{ij} , im Schulkontext meist reelle Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, und sieht folgendermaßen aus:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Elemente werden in m Zeilen und n Spalten angeordnet. Der Platz der einzelnen Elemente a_{ij} in der Matrix wird durch den Zeilenindex i und den Spaltenindex j eindeutig festgelegt – a_{ij} ist das Element in der i -ten Zeile und j -ten Spalte der Matrix. Die Elemente der Matrix nennt man auch Einträge der Matrix.



Beispiel: Der Eintrag a_{37} ist in der Matrix in der dritten Zeile an siebter Stelle.

Für $n = m$ heißt eine Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine quadratische Matrix.

Für $m = 1$ erhält man die $1 \times n$ – Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1 \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

Für $n = 1$ erhält man die $m \times 1$ – Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ j=1}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Die $1 \times n$ – Matrix und $m \times 1$ – Matrix werden häufig als Vektoren bezeichnet.

1.2. Anwendungen von Matrizen

Im Lehrplan für den Vertiefungskurs werden Matrizen sowohl in innermathematischen Situationen als auch in anwendungsbezogenen Kontexten thematisiert. Im Folgenden soll deshalb eine (kleine) Auswahl von Beispielen für inner- und außermathematische

Anwendungsmöglichkeiten von Matrizen dargestellt werden, welche sich im Lehrplan wiederfinden.

1.2.1. Innermathematische Verwendung von Matrizen – Gleichungssysteme

Das Lösen linearer Gleichungssysteme ist eine aus der Mittelstufe wohlbekannte Thematik. Im Vertiefungskurs wird nun ein effizientes neues Verfahren erlernt, um lineare Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen darzustellen und zu lösen.



Beispiel: Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten:

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 19$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 16$$

$$1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 11$$

Dieses gegebene lineare Gleichungssystem kann folgendermaßen mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind in den Spalten die Koeffizienten der entsprechenden Variablen (1. Spalte: x_1 , 2. Spalte: x_2 , 3. Spalte: x_3) enthalten, die Zeilen beziehen sich auf die einzelnen Gleichungen (1. Zeile: 1. Gleichung, 2. Zeile: 2. Gleichung, 3. Zeile: 3. Gleichung). Der Lösungsvektor setzt sich aus den drei Lösungen der Gleichungen zusammen.

Ist A die Matrix, die sich aus den Koeffizienten des linearen Gleichungssystems ergibt, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Vektor der Unbekannten und b der Lösungsvektor, so ergibt sich die folgende formale Schreibweise eines linearen Gleichungssystems: $A \cdot x = b$.

Durch die Darstellung als Matrix können lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des **Gauß-Algorithmus** gelöst werden.



Im Lehrplan für den Vertiefungskurs Mathematik findet sich die Darstellung von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe von Matrizen, sowie die Lösung derer mit dem Gauß-Algorithmus:

„Die Schülerinnen und Schüler notieren lineare Gleichungssysteme mithilfe von Matrizen und Vektoren (z. B. bei der Bestimmung des Terms einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten dreier Parabelpunkte) und lösen diese mithilfe des Gauß-Algorithmus.“¹

¹ <https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachlehrplan/gymnasium/12/mathematik/vertieft>

1.2.2. Anwendungsbezogenen Verwendung von Matrizen

1.2.2.1. Kundenwanderungen und Populationsdynamik

In Anwendungskontexten können beispielsweise Kundenwanderungen und Populationsdynamiken mithilfe von Matrizen dargestellt werden.

i Beispiel²: Es gibt zwei Restaurants A und B in einer Stadt. Pro Monat wandern 30 % der Stammgäste von A zu B, während 40 % von B zu A wechseln. Diese Kundenbewegung kann durch die folgende Matrix dargestellt werden:

$$\begin{array}{c} \text{von} \\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{nach} \\ A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$



Im Lehrplan für den Vertiefungskurs Mathematik findet sich die Darstellung von Kundenbewegungen mit Hilfe von Matrizen:

„Die Schülerinnen und Schüler beschreiben einstufige Übergangsprozesse (z. B. Wechselverhalten von Kunden, Populationsentwicklung) mithilfe von linearen Gleichungssystemen, Übergangsgraphen, Tabellen und Übergangsmatrizen und wandeln die verschiedenen Darstellungen flexibel ineinander um. Sie interpretieren Einträge von Übergangsmatrizen im Sachzusammenhang.“

1.2.2.2. Glücks- und Gesellschaftsspiele

Spielzüge in Glücks- und Gesellschaftsspielen können mit Hilfe von Matrizen dargestellt werden.

i Beispiel: Eine Münze wird geworfen. Ziel ist es, Kopf zu werfen. Hat man Kopf geworfen, so ist das Spiel zu Ende. Hat man Zahl geworfen, so wirft man die Münze erneut. Ein Spielzug kann durch folgende Matrix beschrieben werden:

$$\begin{array}{c} \text{von} \\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Z & K \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{nach} \\ Z \\ K \end{array} & \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



Die Darstellung von Spielzügen in Glücks- und Gesellschaftsspielen sowie die Berechnung von beispielsweise Gewinn- und Verlustwahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Matrizen ist ebenfalls Teil des Moduls „Matrizen“ im Vertiefungskurs Mathematik:

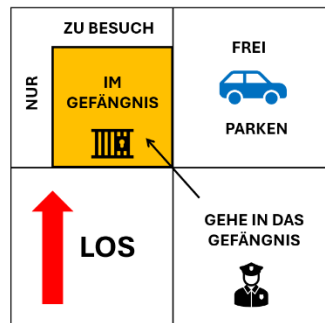
„Die Schülerinnen und Schüler berechnen für Übergangsprozesse mit absorbierenden Zuständen (z. B. bei Glücksspielen) Absorptionswahrscheinlichkeiten [...] näherungsweise durch mehrfache Hintereinanderausführung [...]“

² Beispiel angelehnt an Distel, B. (2024), Fundamente der Mathematik – 12 Vertiefungskurs, S.58

Im Rahmen von diesem Skript wird die Anwendung von Matrizen, genauer Übergangsmatrizen, zur Beschreibung von Spielzügen in Glücks- und Gesellschaftsspielen sowie zur Durchführung dabei möglicher Berechnungen fokussiert. Im Folgenden wird anhand des Spiels „Matropoly“, angelehnt an ein bekanntes Gesellschaftsspiel, das Thema der Übergangsprozesse sowie Übergangsmatrizen (mit absorbierenden Zuständen) theoretisch dargestellt.

Das Spiel „Matropoly“

In Anlehnung an das bekannte Gesellschaftsspiel liegt folgendes Spielfeld vor:



Die Spielregeln:

Gewürfelt wird mit einem normalen Würfel (Augenzahlen 1 – 6) und die Spielfigur darf jeweils um die gewürfelte Augenzahl im Uhrzeigersinn vorrücken. Auf das Spielfeld „Im Gefängnis“ kommt man nur über das „Gehe in das Gefängnis“-Feld. Ist man einmal auf dem Spielfeld „Im Gefängnis“, kann dieses nicht mehr verlassen werden. Eine Aktion, die auf dem Spielbrett beschrieben ist muss nur ausgeführt werden, wenn die Spielfigur direkt auf dem entsprechenden Spielfeld landet, jedoch nicht, wenn man auf einem Spielfeld startet oder über dieses hinweg zieht.

Dabei wollen wir zunächst die verschiedenen **Zustände** betrachten, die ein Spieler bei „Matropoly“ einnehmen kann, und diese mit Vektoren darstellen (Kapitel 2). Anschließend können wir die Wahrscheinlichkeiten für **Übergänge** zwischen den Spielzuständen mithilfe von Matrizen beschreiben (Kapitel 3-9).

2. Zustände und Zustandsvektoren

Ein Zustand ist eine zu einem bestimmten Zeitpunkt vorliegende Situation in einem dynamischen System.

Zustände bei Glücks- oder Gesellschaftsspielen sind beispielsweise Positionen auf Spielfeldern, Guthaben oder geworfene Würfelkombinationen.



Beispiel: Die Zustände in dem Spiel Matropoly geben an, auf welchen der einzelnen Spielfelder „Los“, „Nur zu Besuch“, „Frei Parken“ und „Im Gefängnis“, eine Spielfigur stehen kann. Da eine Spielfigur nicht auf dem Spielfeld „Gehe in das Gefängnis“ stehen bleibt, sondern von dort direkt auf das Feld „Im Gefängnis“ zieht, ist die Position auf dem „Gehe in das Gefängnis“-Feld kein Zustand des Spiels.

Man kann Zustände mit Hilfe von Vektoren, sogenannten Zustandsvektoren beschreiben. Im Fall von bspw. Kundenbewegungen oder Populationsdynamiken enthalten die Zustandsvektoren Kunden bzw. Bevölkerungsanzahlen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Im Fall von Glücks- und Gesellschaftsspielen enthalten die Zustandsvektoren Wahrscheinlichkeiten für den Zustand. Dabei kann zwischen probabilistischen und deterministischen Zustandsvektoren unterschieden werden. Im probabilistischen Fall kann nicht exakt bestimmt werden, welcher Zustand besteht. Der Zustandsvektor enthält die entsprechenden verschiedenen Wahrscheinlichkeiten. Im deterministischen Fall tritt genau ein Zustand ein, der exakt bestimmt werden kann. Der Zustandsvektor enthält ebenfalls die Wahrscheinlichkeiten, die jedoch in diesem speziellen Fall 0 (nicht eingetretener Zustand) bzw. 1 (eingetretener Zustand) sind.



Beispiele

Kundenbewegung:

Restaurant A hat 300 Stammgäste und Restaurant B hat 120 Stammgäste. Dann kann der Startzustand mit folgendem Vektor beschrieben werden:

$$z_R = \begin{pmatrix} 300 \\ 120 \end{pmatrix}$$

Glücks- und Gesellschaftsspiele:

Die Zustände nach einem Würfelwurf können mit Hilfe eines probabilistischen Zustandsvektors beschrieben werden, da diese nicht exakt vorhersagbar sind, sondern nur durch Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden können. Der Zustand nach einem einfachen Würfelwurf mit einem Würfel kann zum Beispiel mit folgendem Zustandsvektor beschrieben werden, da jede Augenzahl mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ auftritt

$$z_W = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Die Zustände des Spiels Matropolis zu Beginn eines Spielzugs können mit Hilfe von deterministischen Zustandsvektoren beschrieben werden, da die Spielfigur mit Wahrscheinlichkeit 1 auf genau einem Feld steht. In den Zustandsvektor schreibt man an diejenige Position eine 1, auf der eine Spielfigur steht. Die anderen Einträge sind 0. Der obere Eintrag stellt das Spielfeld „Los“ dar und die darunterliegenden beschreiben die im Uhrzeigersinn liegenden Spielfelder. Der folgende Vektor beschreibt den Zustand, dass die Spielfigur auf dem Feld „Nur zu Besuch“ steht:

$$z_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Übergangsprozesse

3.1. Definition und Charakterisierung von Übergangsprozessen

Veränderungen von Zuständen in Abhängigkeit der Zeit (z.B. Anteile, Gesamtzahlen, Guthaben, Spielpositionen) können mit Hilfe von Übergangsprozessen dargestellt werden. Hierbei werden neben den beiden Zuständen (Start- und Zielzustand) auch die Wahrscheinlichkeit, von dem einen in den anderen Zustand überzugehen, angegeben.

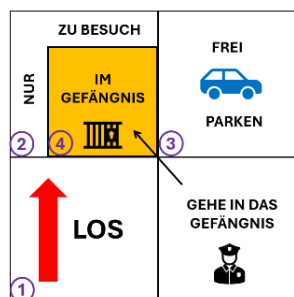
i **Beispiel:** Übergangsprozesse in dem Spiel Matopoly beschreiben die Bewegung einer Spielfigur von einem Spielfeld auf ein anderes Spielfeld pro Spielzug sowie die dazugehörige Wahrscheinlichkeit. Der Übergang einer Spielfigur vom Spielfeld „Los“ zum Spielfeld „Frei Parken“ kann entweder durch eine gewürfelte 2 oder 6, insgesamt also mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ erfolgen. Der Übergangsprozess, der diese Spielsituation beschreibt, ist demnach

$$\text{Los} \xrightarrow{\frac{1}{3}} \text{Frei Parken}$$

3.2. Darstellung von Übergangsprozessen

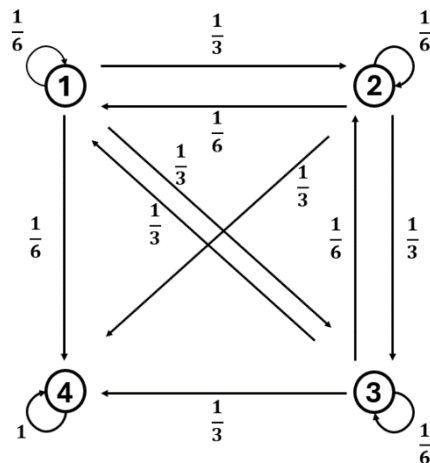
Übergangsprozesse können mit Hilfe von Beschreibungen der Spielsituationen, Übergangsgraphen, Tabellen oder Übergangsmatrizen dargestellt werden.

i **Beispiel:** Zur erleichterten Darstellung der möglichen Übergangsprozesse bei Matopoly, werden zunächst die einzelnen Zustände des Spiels nummeriert:



Beschreibung von Spielsituationen: siehe Beispiel in Kapitel 3.1.

Übergangsgraph:



Tabellen:

		von			
		1	2	3	4
nach	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0
	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
	4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Übergangsmatrix:

$$A = \begin{matrix} & \text{von} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} & \text{nach} \end{matrix}$$

Übergangsmatrizen sind quadratische Matrizen, deren Einträge die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen enthalten. Die Zeilen- oder Spaltensumme von Übergangsmatrizen muss 1 ergeben. Aufgrund der oben festgelegten Darstellung von Übergangsmatrizen, ist in unserem Fall immer die *Spaltensumme* 1.

Die Leserichtung der Matrizen ist analog wie die, die in der Tabelle verwendet wird: Der Spaltenindex gibt die Startposition und der Zeilenindex die Zielposition an.

- i** **Beispiel:** Der Eintrag a_{21} enthält die Übergangswahrscheinlichkeit einer Spielfigur von dem Startfeld „Los“ zum Zielfeld „Nur zu Besuch“.

4. Multiplikation von Matrizen und Vektoren

4.1. Innermathematisch: Funktionsweise

Eine Matrix-Vektor-Multiplikation kann nur dann durchgeführt werden, wenn die Spaltenanzahl einer Matrix mit der Zeilenanzahl eines Vektors übereinstimmt. Dann gilt:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

- i** **Beispiele:**

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ 28 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

4.2. Außermathematisch: Bedeutung bei Glücks- und Gesellschaftsspielen

Durch die Multiplikation von Übergangsmatrizen mit Zustandsvektoren erhält man einen neuen Zustandsvektor, der den Zustand nach einer Zeiteinheit beschreibt. Im Kontext von Glücks- und Gesellschaftsspielen ist dies ein Vektor, der die Wahrscheinlichkeiten angibt, von dem Startzustand zu einem neuen Zustand zu gelangen.

- i** **Beispiel:** Um im Spiel Matropolis die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge ausgehend vom Feld "Frei Parken" zu erhalten, multipliziert man die Übergangsmatrix mit dem Zustandsvektor für die Spielposition 3:

$$A \cdot z_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor dieser Matrix-Vektor-Multiplikation enthält die Wahrscheinlichkeiten ausgehend vom Feld „Frei Parken“ die Felder „Los“ (Eintrag 1), „Nur zu Besuch“ (Eintrag 2), „Frei Parken“ (Eintrag 3) oder „Im Gefängnis“ (Eintrag 4) zu erreichen.

Sind die Zustandsvektoren Einheitsvektoren (ein Eintrag ist 1 und die anderen Einträge sind 0) mit einer 1 an der i-ten Stelle, so entspricht der Lösungsvektor der Matrix-Vektor-Multiplikation der i-ten Spalte der Übergangsmatrix.

5. Multiplikation von Matrizen

5.1. Innermathematisch: Funktionsweise

Eine Matrix-Matrix-Multiplikation kann durchgeführt werden, wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmt. Dann gilt:

$$A \cdot B = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \cdot (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq r}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n2} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1r} + a_{12} \cdot b_{2r} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nr} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{n1} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{n2} & \cdots & a_{21} \cdot b_{1r} + a_{22} \cdot b_{2r} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{nr} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} & a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n2} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1r} + a_{m2} \cdot b_{2r} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{nr} \end{pmatrix}$$

i **Beispiel:**

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$$

Das n-fache Potenzieren von Matrizen entspricht der n-fachen Multiplikation der entsprechenden Matrix.

5.2. Außermathematisch: Bedeutung bei Glücks- und Gesellschaftsspielen

Die Matrix-Matrix-Multiplikation kommt im Kontext von Glücks- und Gesellschaftsspielen bei der Potenzierung von Übergangsmatrizen vor. Durch die n-fache Potenzierung von Übergangsmatrizen ergibt sich eine neue Übergangsmatrix, die die Wahrscheinlichkeit für Übergänge zwischen den entsprechenden Zuständen nach n Spielrunden enthält.

i **Beispiel:** In dem Spiel Matopoly enthält die Matrix A^3 die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Spielfeldern nach drei Spielrunden. Es gilt:

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{54} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{54}{17} & \frac{216}{7} & \frac{216}{29} & 0 \\ \frac{108}{125} & \frac{54}{71} & \frac{216}{139} & 0 \\ \frac{216}{216} & \frac{108}{216} & \frac{216}{216} & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eintrag $a_{32} = \frac{7}{54}$ gibt an, dass die Spielfigur nach drei Spielrunden mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{7}{54} \approx 12,96\%$ ausgehend von dem Feld „Nur zu Besuch“ auf dem Feld „Frei Parken“ zum Stehen kommt.

Durch die Multiplikation von n-fach potenzierten Übergangsmatrizen mit einem entsprechenden Zustandsvektor erhält man im Kontext von Glücks- und Gesellschaftsspielen einen Vektor, der die Wahrscheinlichkeiten angibt, in n Spielzügen von dem Startzustand zu einem neuen Zustand zu gelangen.

i Beispiel: Möchte man im Spiel Matropolis die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge nach drei Spielrunden ausgehend vom Feld "Los", so multipliziert man die dreifach potenzierte Übergangsmatrix mit dem Zustandsvektor für die Spielposition 1:

$$A^3 \cdot z_L = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{54} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{54}{17} & \frac{216}{7} & \frac{216}{29} & 0 \\ \frac{108}{125} & \frac{54}{71} & \frac{216}{139} & 0 \\ \frac{216}{216} & \frac{108}{216} & \frac{216}{216} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} \\ \frac{7}{54} \\ \frac{54}{17} \\ \frac{108}{125} \\ \frac{216}{216} \end{pmatrix}$$

Der Lösungsvektor dieser Matrixvektormultiplikation enthält die Wahrscheinlichkeiten ausgehend vom Feld „Los“ die Felder „Los“ (Eintrag 1), „Nur zu Besuch“ (Eintrag 2), „Frei Parken“ (Eintrag 3) oder „Im Gefängnis“ (Eintrag 4) nach drei Spielrunden zu erreichen.

? Beispiel für Fragestellung: Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten, nach drei Spielrunden im Gefängnis gelandet zu sein. Betrachten Sie dabei unterschiedliche Felder als Startpositionen.

Lösung: Die geforderten Wahrscheinlichkeiten können folgendermaßen berechnet werden:

$$p_{3,x} = A^3 \cdot z_x$$

Die Wahrscheinlichkeit, im Gefängnis zu landen, steht im Ergebnisvektor im untersten Eintrag und kann dort abgelesen werden.

Fall 1: Startposition „Los“:

$$p_{3,L} = A^3 \cdot z_L = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{216} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{17}{216} & \frac{7}{216} & \frac{29}{216} & 0 \\ \frac{108}{216} & \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{125}{216} & \frac{71}{216} & \frac{139}{216} & 0 \\ \frac{216}{216} & \frac{108}{216} & \frac{216}{216} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} \\ \frac{7}{216} \\ \frac{54}{216} \\ \frac{17}{216} \\ \frac{108}{216} \\ \frac{125}{216} \\ \frac{216}{216} \end{pmatrix}$$

Fall 2: Startposition „Nur zu Besuch“:

$$p_{3,N} = A^3 \cdot x_N = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{216} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{17}{216} & \frac{7}{216} & \frac{29}{216} & 0 \\ \frac{108}{216} & \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{125}{216} & \frac{71}{216} & \frac{139}{216} & 0 \\ \frac{216}{216} & \frac{108}{216} & \frac{216}{216} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{216} \\ \frac{23}{216} \\ \frac{216}{216} \\ \frac{7}{216} \\ \frac{54}{216} \\ \frac{71}{216} \\ \frac{108}{216} \end{pmatrix}$$

Fall 3: Startposition „Frei Parken“:

$$p_{3,F} = A^3 \cdot x_F = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{216} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{17}{216} & \frac{7}{216} & \frac{29}{216} & 0 \\ \frac{108}{216} & \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{125}{216} & \frac{71}{216} & \frac{139}{216} & 0 \\ \frac{216}{216} & \frac{108}{216} & \frac{216}{216} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{216} \\ \frac{23}{216} \\ \frac{216}{216} \\ \frac{29}{216} \\ \frac{216}{216} \\ \frac{139}{216} \\ \frac{216}{216} \end{pmatrix}$$

Fall 4: Startposition „Im Gefängnis“:

$$p_{3,G} = A^3 \cdot x_G = \begin{pmatrix} \frac{29}{216} & \frac{23}{216} & \frac{25}{216} & 0 \\ \frac{7}{216} & \frac{23}{216} & \frac{23}{216} & 0 \\ \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{17}{216} & \frac{7}{216} & \frac{29}{216} & 0 \\ \frac{108}{216} & \frac{54}{216} & \frac{216}{216} & 0 \\ \frac{125}{216} & \frac{71}{216} & \frac{139}{216} & 0 \\ \frac{216}{216} & \frac{108}{216} & \frac{216}{216} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6. Absorbierende Zustände

Absorbierende Zustände sind Zustände in dynamischen Prozessen, die sich nicht mehr ändern und nicht wieder verlassen werden können. Die Existenz von absorbierenden Zuständen sieht man folgendermaßen:

- In dem Übergangsgraphen gibt es einen Zustand, der nur in sich selbst übergeht.
- In der Übergangsmatrix gibt es eine Spalte, die genau eine 1 (Wahrscheinlichkeit, in diesem Zustand zu bleiben) auf der Hauptdiagonalen und sonst nur 0 enthält.

i Beispiel: In dem Spiel Matopoly ist das Stehen auf dem Feld „Im Gefängnis“ der absorbierende Zustand, da man dieses Spielfeld nicht mehr verlassen kann, wenn man es einmal erreicht hat – egal welche Augenzahl man würfelt.

Dies erkennt man in der Übergangsmatrix anhand der vierten Spalte, die zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten von Feld „Im Gefängnis“ zum Feld „Im Gefängnis“ zu gelangen, 1 beträgt, während die Wahrscheinlichkeiten, von diesem Feld auf ein anderes Feld zu gelangen, 0 betragen.

7. Fixvektoren

Ein Fixvektor x einer Matrix A ist ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, der sich bei Multiplikation mit einer Matrix nicht verändert. Es gilt also:

$$A \cdot x = x$$

Demnach ist ein Fixvektor in Bezug auf Übergangsmatrizen ein Zustandsvektor, der einen Zustand beschreibt, der „fest“ ist, sich also durch einen Übergangsprozess nicht ändert.

Der Zustandsvektor, der einen absorbierenden Zustand beschreibt, ist immer ein Fixvektor einer Übergangsmatrix. Die andere Richtung gilt jedoch nicht immer!

i Beispiel: In dem Spiel Matopoly ist der folgende Zustandsvektor ein Fixvektor:

$$z_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

denn

$$A \cdot z_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen lassen sich Fixvektoren über ein lineares Gleichungssystem ermitteln:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

8. Exkurs: Transponierte Matrizen

8.1. Innermathematische Definition

Gegeben sei eine Matrix A mit

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dann heißt die Matrix

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die transponierte Matrix zu A.

Die Matrix A^T ergibt sich, wenn man die Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht (1. Zeile wird 1. Spalte usw.). Man erhält die transponierte Matrix durch Spiegelung einer Matrix an der Hauptdiagonalen.

i Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Dann ist die Matrix $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ die transponierte Matrix zu A.

Für eine $m \times n$ – Matrix A und eine $n \times r$ – Matrix B gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

8.2. Außermathematisch: Bedeutung bei Glücks- und Gesellschaftsspielen

Anwendungsbeispiel transponierte Matrizen: siehe Arbeitsblatt „Matropolis II“, Aufgabe 7.

9. Exkurs: Grenzmatrizen

9.1. Innermathematische Definition

Unter gewissen Voraussetzungen konvergieren die Matrixpotenzen einer Matrix A gegen eine Grenzmatrix G. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = G$$

Beispiel³: Die Potenz der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ konvergiert gegen die Grenzmatrix

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

³ Beispiel angelehnt an Distel, B. (2024), Fundamente der Mathematik – 12 Vertiefungskurs, S.74

Hierbei wird der Beginn und das Ende einer Matrix durch `begin{matrix}` und `end{matrix}` gekennzeichnet. Das `&`-Zeichen fügt eine neue Spalte hinzu und das `\\`-Zeichen eine neue Zeile.

i **Beispiel:** Eine 3×4 – Matrix kann über folgenden LaTeX-Code generiert werden:
`(\begin{matrix}&&&&\\&&&&\\&&&&\\end{matrix})`

GeoGebra:

In GeoGebra kann eine Matrix auf zwei Wegen eingefügt werden:

1. Direkt durch folgende Schreibweise:

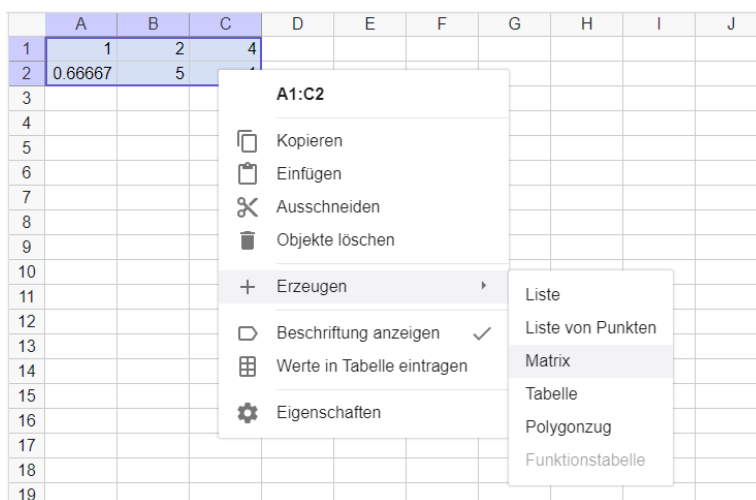
$$\{\{x,x\},\{x,x\}\}$$

Hierbei wird durch die äußere eckige Klammer die Matrix festgelegt. Durch die inneren eckigen Klammern werden die Zeilen festgelegt und durch die Anzahl der Einträge in den inneren eckigen Klammern die Spalten.

i **Beispiel:** Eine 3×4 – Matrix kann in GeoGebra folgendermaßen generiert werden:
`\{\{x,x,x\},\{x,x,x\},\{x,x,x\},\{x,x,x\}\}`

2. Über die Tabellenkalkulation:
 - a. Tabellenkalkulation in GeoGebra öffnen
 - b. Matrix eingeben (siehe Abbildung)
 - c. Rechtsklick > Erzeugen > Matrix

Hinweis: Die Einträge der Matrix ändern sich anschließend automatisch, wenn sie in der Tabelle geändert werden.



Hinweis: Die LaTeX-Schreibweise kann auch in GeoGebra verwendet werden.

11. Kriterien für Glücks- und Gesellschaftsspiele

Folgende Kriterien müssen für Glücks- und Gesellschaftsspiele gelten, damit diese für die Bearbeitungen mittels Übergangsprozessen und -matrizen im Rahmen des Vertiefungskurses geeignet sind:

- Nicht zu viele Zustände (oder man reduziert künstlich)
- Klar definierte Zustände (die man mit Zahlen ausdrücken kann)
- Nicht zu viele mögliche Übergänge
- Übergänge hängen nur von dem jeweiligen Spielzug ab und nicht von vorherigen
- Nur Zufall bestimmt das Spiel (oder man nimmt eine bestimmte Strategie an)
- Die Spieler interagieren nicht miteinander